

# XI ECOECO

VII Congreso Iberoamericano  
Desarrollo y Ambiente

XI ENCONTRO NACIONAL DA ECOECO  
Araraquara-SP - Brasil

---

CONTROLE OTIMIZADO PARA A EXTRAÇÃO DE RECURSOS EXAURÍVEIS FRENTE AO ÍNDICE DE RIQUEZA INCLUSIVA.

**Érika Capelato** (UNESP) - erika@fclar.unesp.br

*Formada em Matemática e atuando em Matemática Aplicada. Professora do Departamento de Economia-Faculdade de Ciências e Letras-UNESP*

**André Luiz Correa** (UNESP) - andrelc@fclar.unesp.br

*Economista, atuando na área de Teoria Econômica. Professor do Departamento de Economia-Faculdade de Ciências e Letras - UNESP*

**Suzana Cristina Fernandes de Paiva** (UNESP) - suzanapaiva@fclar.unesp.br

*Economista, atuando na área de Desenvolvimento Econômico e Políticas Públicas. Professora do Departamento de Economia-Faculdade de Ciências e Letras-UNESP*

## **Controle otimizado para a extração de recursos exauríveis frente ao Índice de Riqueza Inclusiva.**

Érika Capelato (UNESP) – [erika@fclar.unesp.br](mailto:erika@fclar.unesp.br)

André Luiz Correa (UNESP) – [andrelc@fclar.unesp.br](mailto:andrelc@fclar.unesp.br)

Suzana Cristina Fernandes de Paiva (UNESP) – [suzanapaiva@fclar.unesp.br](mailto:suzanapaiva@fclar.unesp.br)

**RESUMO:** A mensuração do bem-estar econômico levando em consideração a questão da sustentabilidade do crescimento econômico tem ganhado corpo recentemente. A criação do Índice de Riqueza Inclusiva sintetiza parte destes esforços. A inclusão do capital natural, relacionado aos recursos naturais e ecossistemas de um país, representa um grande avanço em relação aos indicadores tradicionais: PIB per capita e IDH. Neste trabalho fazemos uma simulação da taxa de extração ótima de recursos naturais utilizando o princípio do máximo de pontryagin. Em 2012, o PNUMA divulgou um dado que diz que em 18 anos os recursos naturais *per capita* no Brasil diminuirão 25%. Considerando que o recurso inicial é 1 a taxa de extração *per capita* é aproximadamente 1,25% ao ano. Se a considerarmos como sendo a taxa ótima de extração ou seja, se a extração continuar neste ritmo, pelo princípio do máximo teremos uma exaustão deste recurso natural em aproximadamente, 80 anos.

A temática relacionada ao processo de desenvolvimento sustentável tem ganhado corpo no debate econômico contemporâneo. As Teorias sobre o Crescimento Econômico priorizaram inicialmente o papel da acumulação de capital físico e do progresso tecnológico no processo de crescimento. No período mais recente, cresceu a importância do capital humano e do investimento em educação e qualificação das pessoas. Não obstante, a questão dos impactos ambientais das atividades econômicas e a discussão em torno da sustentabilidade não são contempladas adequadamente.

A medida mais difundida de crescimento econômico ao fim do século XX foi o PIB *per capita*. De fato, níveis maiores de renda permitem o acesso a um volume maior de bens e serviços, todavia, este indicador não leva em conta outros aspectos como desigualdade de riquezas e oportunidades, sendo limitado, de fato, como indicador de desenvolvimento econômico. Desde os anos 1990, a mensuração do desenvolvimento ganhou nova dimensão com o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), que em suas primeiras versões levava em consideração indicadores de renda, educação e expectativa de vida. Mais recentemente, o IDH passou a incorporar indicadores associados à pobreza multidimensional, desigualdade de renda e desigualdade de gênero. O IDH representou um avanço na construção de indicadores sobre o desenvolvimento, graças aos méritos de suas características: ampla cobertura de países, facilidade de interpretação, possibilidade de comparação, entre outras.

Apesar dos avanços, o IDH ainda apresenta algumas limitações, conforme ressalta UNEP (2014). Em relação à questão do bem-estar, o IDH concentra-se basicamente nos resultados e não nos determinantes. No que se refere à sustentabilidade, não são contemplados indicadores ou medidas adequadas. Com vistas à elaboração de um indicador mais apropriado, o UNEP propõe o Índice de Riqueza

Inclusiva<sup>1</sup>. Idealizado como uma medida mais ampla do desenvolvimento sustentável, procura transcender a questão da mensuração de bem-estar baseada em variáveis econômicas tradicionais e avaliadas em valores monetários.

O cálculo do Índice de Riqueza Inclusiva considera três dimensões para o capital de uma nação: o capital físico (maquinaria, infraestrutura) e o capital humano (educação e saúde), geralmente incorporados nos estudos e pesquisas sobre crescimento econômico, e inova ao incluir o capital natural. O capital natural inclui riquezas naturais do país, como recursos minerais e combustíveis fósseis, recursos florestais, ecossistemas, terras agricultáveis, água doce, entre outros. A ideia é que não se pode medir bem-estar e riqueza, com uma visão de prazo mais longo, sem considerarmos a sustentabilidade.

Uma das dimensões do capital natural refere-se à questão dos recursos naturais. Hotelling (1931) é considerado um dos trabalhos pioneiros na questão da utilização dos recursos naturais. Em que pese suas limitações, os resultados deste modelo vêm servindo de base para estudos empíricos<sup>2</sup>. Abaixo apresenta-se um exercício de aplicação deste método à economia brasileira.

Para abordarmos o problema da otimização da extração dos recursos vamos utilizar o *princípio do máximo de pontryagin*, a principal ferramenta usada na teoria do controle ótimo, de autoria do matemático L.S. Pontryagin. Para maiores detalhes consulte Hestenes (1966).

Neste trabalho vamos usar a versão do modelo apresentada por Chiang (2006) para abordar a extração ótima de recursos naturais:

Sejam  $s(t)$  o estoque de um recurso exaurível e  $q(t)$  a taxa de extração em qualquer instante  $t$ . O recurso extraído produz um bem de consumo final  $c$  tal que  $c = c(q)$  onde  $c' > 0$  e  $c'' < 0$ . O bem de consumo é o único argumento na função utilidade,  $U = U(c(q))$ , de um consumidor com:  $U' > 0$  e  $U'' < 0$ .

Assim, o problema dinâmico de escolher a taxa de extração ótima sujeita a não negatividade da variável de estado  $s(t)$  é:

$$\text{Maximizar } \int_0^T U(c(q, t)) dt$$

$$\text{Sujeita a: } s'(t) = -q(t), \text{ com } s(0) = s_0 \text{ e } s(T) \geq 0$$

onde  $s_0$  é o estoque inicial,  $s'(t)$  é a taxa de variação do estoque do recurso e  $0, T$  é o intervalo de tempo.

A solução, deste problema apresenta trajetória de estado ótimo  $s(t) = s_0 - q^*t$ , onde  $q^*$  é a taxa ótima de extração constante ao longo do tempo, a qual só é possível determinar conhecendo-se  $U$  e  $c$ .

Em 2012, o PNUMA<sup>3</sup> divulgou um dado que diz que em 18 anos os recursos naturais *per capita* no Brasil diminuíram 25%. Considerando que o recurso inicial

<sup>1</sup> Para detalhes ver UNEP (2012) e UNEP (2014).

<sup>2</sup> Ver por exemplo BEA (1994).

<sup>3</sup> Acessado em [http://www.pnuma.org.br/comunicados\\_detalhar.php?id\\_comunicados=213](http://www.pnuma.org.br/comunicados_detalhar.php?id_comunicados=213).

$s_0 = 1$  e  $T = 18$  anos a taxa de extração constante *per capita* é de aproximadamente  $q = 1,25\%$  ao ano. Se a considerarmos como sendo a taxa ótima de extração, pela trajetória ótima acima teremos uma exaustão deste recurso natural em aproximadamente, 80 anos.

É possível observar na literatura infinitos modelos para prever a extração ótima de recursos naturais assim, o objetivo deste trabalho é contribuir para esta discussão apontando para os gestores a necessidade de estarem atentos a estes modelos ao tomarem uma decisão, pois estes carregam informações que podem trazer melhorias em longo prazo no que se refere à extração consciente.

## **Bibliografia**

BEA – BUREAU OF ECONOMIC ANALYSIS (1994). Accounting for mineral resources: Issue and BEA's initial estimates. *Survey of Current Business*. 74(4) v., p. 50-72.

CHIANG, A.C., (2006). *Matemática para economistas*, Elsevier, Rio de Janeiro.

HESTENES, M. R., (1966). *Calculus of Variation and Optmal Control Theory*, John Wile and Sons, London.

HOTELLING, H., (1931) The Economics of Exhaustible resources. *Journal of Political Economy*. Apr. 39 n.2, p. 124-142

UNEP (2012). *Inclusive Wealth Report 2012*. Measuring progress toward sustainability. Cambridge: Cambridge University Press.

UNEP (2014). *Inclusive Wealth Report 2014*. Measuring progress toward sustainability. Cambridge: Cambridge University Press.